ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HÀ MAI LOAN

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT VÀ TÍNH COFINITE CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HÀ MAI LOAN

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT VÀ TÍNH COFINITE CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm ...

Người viết Luận văn

Hà Mai Loan

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Tiến sĩ NGUYỄN VĂN HOÀNG - Giảng viên Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập. Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập. Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2016

Người viết luận văn

Hà Mai Loan

Mục lục

Mở đầu

Cho R là vành Noether, $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R, và M là $R-$môđun. Một vấn đề quan trọng trong đại số giao hoán là xác định khi nào tập các iđêan nguyên tố liên kết của môđun đối đồng điều địa phương thứ i, $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ của M ứng với iđêan $\mathfrak{a}$ là hữu hạn. Nếu R là vành địa phương chính quy chứa một trường, khi đó $H^i_{\mathfrak{a}}(R)$ chỉ có hữu hạn các iđêan nguyên tố liên kết với mọi $i \geq 0$ (trong [10] và [13]). Trong [20] Singh đã đưa ra một ví dụ của một vành Noether R không địa phương và một iđêan $\mathfrak{a}$ sao cho $H^3_{\mathfrak{a}}(R)$ có vô hạn các iđêan nguyên tố liên kết. Cũng trong [11] Katzman đã đưa ra một ví dụ của một vành địa phương Noether R với đặc số dương và một iđêan $\mathfrak{a}$ sao cho $H^2_{\mathfrak{a}}(R)$ có vô hạn các iđêan nguyên tố liên kết.

Trong [2, Định lý 2.2] Brodmann và Lashgari đã chỉ ra rằng môđun đối đồng điều địa phương không hữu hạn sinh đầu tiên $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ của một môđun hữu hạn sinh M ứng với một iđêan $\mathfrak{a}$ chỉ có hữu hạn các iđêan nguyên tố liên kết.

Một $R-$môđun M được gọi là $\mathfrak{a}$-cofinite nếu $\mathrm{Supp}_R(M) \subseteq \mathrm{V}(\mathfrak{a})$ và $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$. Gần đây M. T. Dibaei và S. Yassemi đã mở rộng kết quả của Brodmann và Lashgari, cụ thể là định lý sau:

Định Lý 1 ([6, Định lý 2.1]) *Cho $\mathfrak{a}$ là một iđêan của vành Noether R. Cho s là một số nguyên không âm. Cho M là $R-$môđun sao cho* $\operatorname{Ext}^s_R(R/\mathfrak{a}, M)$ *là $R-$môđun hữu hạn sinh. Nếu $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là $\mathfrak{a}-$cofinite với mọi $i < s$, thì* $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H^s_{\mathfrak{a}}(M))$ *là hữu hạn sinh.*

Mặt khác, trong [12] Khashyarmanesh và Salarian đã chỉ ra rằng môđun đối đồng điều địa phương thứ t, $H^t_{\mathfrak{a}}(M)$ của một môđun hữu hạn sinh M ứng với một iđêan $\mathfrak{a}$ có hữu hạn các iđêan nguyên tố liên kết nếu $\operatorname{Supp}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ là hữu hạn với mọi $i < t$. Gần đây, P. H. Quý đã kết hợp kết quả của Brodmann-Lashgari và kết quả của Khashyarmanesh-Salarian, cụ thể là định lý sau:

Định lý 2 ([18, Định lý 3.2]) *Cho $\mathfrak{a}$ là một iđêan của vành Noether R, và cho M là một $R-$môđun hữu hạn sinh. Cho $t \in \mathbb{N}$ sao cho $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là hữu hạn sinh hoặc* $\operatorname{Supp}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ *là hữu hạn với mọi $i < t$. Khi đó* $\operatorname{Ass}_R(H^t_{\mathfrak{a}}(M))$ *là tập hữu hạn.*

Trong phần tiếp theo ta tìm hiểu một số kiến thức căn bản về tính chất cofinite của môđun. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, cho M là $R-$môđun hữu hạn sinh và $\mathfrak{a}$ là iđêan của R, trong [6] Dibaei và Yassemi đã định nghĩa $q(\mathfrak{a}, M)$ là số nguyên nhỏ nhất $n \geq -1$ sao cho các môđun $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là $\mathfrak{m}$-cofinite với mọi $i > n$, và đưa ra kết quả về số nguyên $q(\mathfrak{a}, M)$, cụ thể là định lý sau:

Định lý 3 ([6, Định lý 3.9]) *Cho $\mathfrak{a}$ là iđêan của R và $i \geq 0$ là một số nguyên cho trước sao cho $H^i_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{b})$ là $\mathfrak{m}-$cofinite với mọi iđêan $\mathfrak{b}$ của R. Khi đó $q(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) < i$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Đặc biệt, $q(\mathfrak{a}, M) < i$ với mỗi*

$R-$môđun hữu hạn sinh M.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại chi tiết các chứng minh của các Định lý 1, 2, 3 như đã nêu trên, các chứng minh này dựa trên ba bài báo chính là [6], [17], [18]. Luận văn được chia làm hai chương. Chương 1 dành để trình bày những kiến thức chuẩn bị cần thiết bao gồm: iđêan nguyên tố liên kết, biểu diễn thứ cấp, môđun Ext và Tor, môđun đối đồng điều địa phương, bao đầy đủ của môđun. Chương 2 là chương chính của luận văn dành để chứng minh chi tiết các Định lý 1, Định lý 2, Định lý 3 như đã nêu trên, bên cạnh đó một số hệ quả của các định lý và một số kiến thức căn bản về tính chất cofinite của môđun cũng được trình bày.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này ta luôn giả thiết R là vành giao hoán Noether, M là $R-$môđun và $\mathfrak{a}$ là iđêan của R.

1.1 Iđêan nguyên tố liên kết

Các kiến thức của mục này được trích theo cuốn sách [14].

Định nghĩa 1.1.1. *(Iđêan nguyên tố liên kết)* Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là iđêan nguyên tố liên kết của M nếu có một phần tử $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}$.
Tập tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\mathrm{Ass}_R(M)$ (hoặc $\mathrm{Ass}(M)$).

Định nghĩa 1.1.2. *(Tập giá của môđun)* Đặt

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Khi đó $\mathrm{Supp}_R(M)$ được gọi là tập giá của M.

Sau đây là một số tính chất của tập các iđêan nguyên tố liên kết.